

Geometrické důkazy základních goniometrických identit

Hynek Čebiš

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Abstrakt

Tento článek představuje čtyři geometrické důkazy základních trigonometrických identit: $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\tan(2x)$ a $\sin(x + y)$. Každý důkaz vychází z pravoúhlé geometrie a skládání trojúhelníků, bez použití jednotkové kružnice.

V článku vycházíme pouze z elementárních geometrických principů. V případech, kde je použita sinová nebo kosinová věta, jsou goniometrické výrazy jako $\sin(2x)$ ponechány jako neznámé a zpětně vyjádřeny pomocí stran trojúhelníku. Důkazy tedy nevyžadují znalost hodnot příslušných goniometrických funkcí a jsou vystavěny pouze na základních geometrických vztazích.

Důkaz identity $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

Použijeme vztahy mezi stranami v pravoúhlých trojúhelnících:

$$\sin x = \frac{b}{c}, \quad \cos x = \frac{a}{c}$$

Z pravé strany identity:

$$2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{2ab}{c^2}$$

Nyní spočítáme levou stranu pomocí sinové věty.

Při konstrukci dvojice pravoúhlých trojúhelníků vznikne úhel $2x$ a protilehlá strana k tomuto úhlu má délku $2b$. Použijeme sinovou větu ve tvaru:

$$\frac{2b}{\sin(2x)} = \frac{c}{\sin \alpha}, \quad \text{kde } \sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Po dosazení:

$$\frac{2b}{\sin(2x)} = \frac{c}{a/c} = \frac{c^2}{a} \Rightarrow \sin(2x) = \frac{2ba}{c^2} = \frac{2ab}{c^2}$$

Tím je dokázáno:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

Důkaz identity $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Použijeme vztahy mezi stranami v pravoúhlých trojúhelnících:

$$\cos x = \frac{a}{c}, \quad \sin x = \frac{b}{c} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{a^2}{c^2}, \quad \sin^2 x = \frac{b^2}{c^2}$$

Tedy:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

Použijeme kosinovou větu pro vzniklý trojúhelník se základnou $2b$:

$$4b^2 = 2c^2 - 2c^2 \cos(2x)$$

Úpravy:

$$\begin{aligned} 4b^2 &= 2c^2 - 2c^2 \cos(2x) \\ 4b^2 - 2c^2 &= -2c^2 \cos(2x) \\ \Rightarrow \cos(2x) &= \frac{2c^2 - 4b^2}{2c^2} = \frac{c^2 - 2b^2}{c^2} \end{aligned}$$

Nyní sestavíme rovnici:

$$\frac{c^2 - 2b^2}{c^2} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$$

Po odstranění jmenovatele:

$$c^2 - 2b^2 = a^2 - b^2$$

Přičteme $2b^2$ k oběma stranám:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Tím jsme ověřili rovnost obou stran, neboť jsme dospěli k Pythagorově větě, která v tomto případě platí — výchozí trojúhelník je pravoúhlý.

Identita $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ tím byla geometricky dokázána.

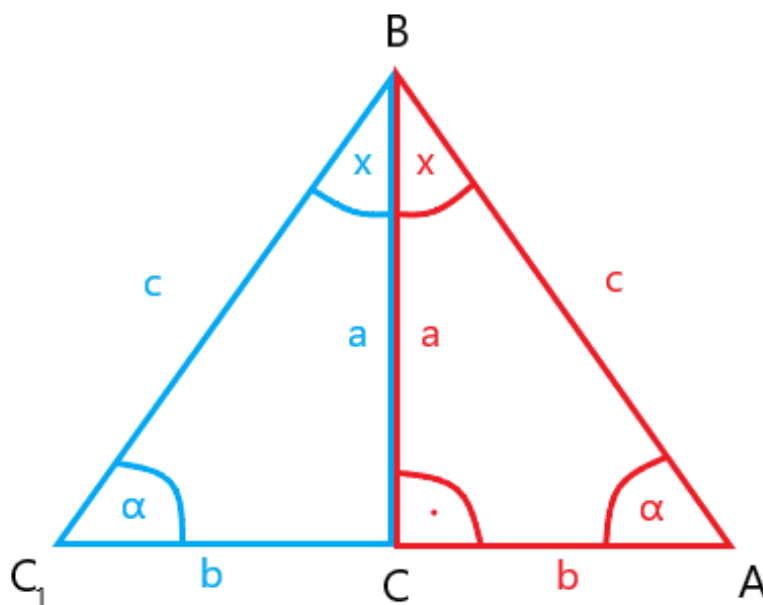
Důkaz identity $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Použijeme základní definici tangens:

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

Z předchozích důkazů:

$$\sin(2x) = \frac{2ab}{c^2}, \quad \cos(2x) = \frac{a^2 - b^2}{c^2} \Rightarrow \tan(2x) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

$$\tan x = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2b/a}{1 - b^2/a^2} = \frac{2b/a}{(a^2 - b^2)/a^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$
$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$


Důkaz identity $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Následně přidáme další pravoúhlý trojúhelník A_1CB , kde je pravý úhel opět u vrcholu C a úhel y tentokrát u vrcholu B . Odvěsna sdílená s předchozím trojúhelníkem má délku a , druhá odvěsna je $k \cdot b$, kde $k \in \mathbb{R}$. Přepona nového trojúhelníku má tedy délku $\sqrt{a^2 + k^2 b^2}$.

Použijeme vztahy mezi stranami v pravoúhlých trojúhelnících:

$$\sin x = \frac{b}{c}, \quad \cos x = \frac{a}{c}, \quad \cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + k^2 b^2}}, \quad \sin y = \frac{kb}{\sqrt{a^2 + k^2 b^2}}$$

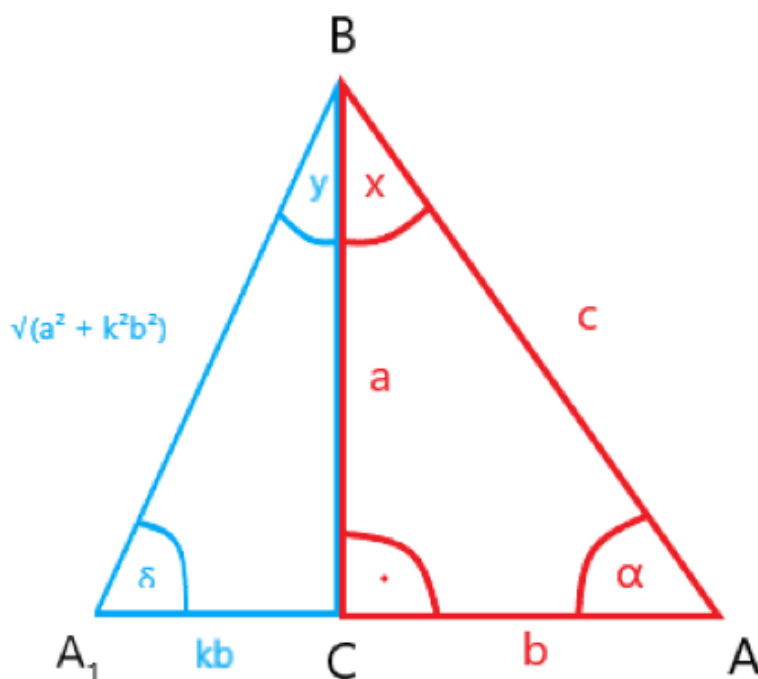
$$\begin{aligned}\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + k^2 b^2}} + \frac{a}{c} \cdot \frac{kb}{\sqrt{a^2 + k^2 b^2}} \\ &= \frac{ab}{c \cdot \sqrt{a^2 + k^2 b^2}} (1 + k) \\ &= \frac{ab(k+1)}{c \cdot \sqrt{a^2 + k^2 b^2}}\end{aligned}$$

Použijeme sinovou větu ve tvaru:

$$\frac{b(k+1)}{\sin(x+y)} = \frac{\sqrt{a^2 + k^2b^2}}{a/c} \Rightarrow \sin(x+y) = \frac{ab(k+1)}{c \cdot \sqrt{a^2 + k^2b^2}}$$

Tím je dokázáno:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$



Obrázek 2: Rozšířená konstrukce pro důkaz identity $\sin(x+y)$.

Závěr

Tento soubor netradičních geometrických důkazů ukazuje, že i dobře známé goniometrické identity lze odvodit čistě geometrickým způsobem. Takový přístup je vhodný zejména pro studenty, kteří se s trigonometrií teprve seznamují, a může posloužit jako zajímavé a názorné doplnění tradičních výukových metod. Geometrické myšlení přináší důležitý vizuální rozměr a přirozeně propojuje analytickou a syntetickou stránku matematiky. Předložené důkazy se vyznačují svou jednoduchostí a originalitou a mohou najít uplatnění při výuce trigonometrie na středních i vysokých školách.